Métodos Numéricos
22 de abril de 2019
Primer Parcial

DEPARTAMENTO
DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

☐ Resolver ejercicios en hojas separadas ☐ Completar nombre en las hojas	Lib. Univ.		Nombre y Apellido		
☐ Completar LU y nombre en el enunciado ☐ **Justificar <u>todas</u> las respuestas**	Ej. 1 17	Ej. 2 25	Ej. 3 24	Ej. 4 10	Nota 76 AP

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Demostrar las que sean verdaderas, encontrar un contraejemplo para las que sean falsas. (5 puntos cada ítem)

   (a) Si $A^2 + I = 0$ entonces n es par.

   (b) Si $A^2 + A - I = 0$ entonces A es inversible.

   (c) Si $tr(A^tA) = 0$ entonces $A = 0$.

   (d) Si $Nu(A) \neq \{0\}$ entonces A es nilpotente[1].

   (e) $Nu(A) = Nu(A^tA)$.

2. Normalmente, realizamos la eliminación gaussiana *hacia abajo* para producir una matriz triangular superior U a partir de una matriz A. Supongamos que eliminamos *hacia arriba* para convertir A en una matriz triangular inferior L. Por ejemplo, para la siguiente matriz A,

$$A = A^{(0)} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = L$$

   donde llamamos $A^{(k)}$ a la matriz luego de haber triangulado k columnas comenzando desde la última y desde abajo hacia arriba.

   (a) Para cualquier matriz A, construir la matriz $\widehat{M}_k$ de forma tal que $A^{(k+1)} = \widehat{M}_k A^{(k)}$. Es decir, $\widehat{M}_k$ pone en ceros los valores arriba de la diagonal en la k-ésima columna. ¿Cuál es la inversa de $\widehat{M}_k$? (8 puntos)

   (b) Para la matriz A del ejemplo, hallar la factorización $A = UL$, con L triangular inferior y U triangular superior con unos en la diagonal. (8 puntos)

   (c) Determinar y justificar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "Una matriz inversible tiene factorización UL si y sólo si sus submatrices principales son inversibles." (9 puntos)

3. (a) Probar que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es definida positiva si y sólo si P^tAP es definida positiva, con P una matriz de permutación. (5 puntos)

   (b) Sea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

      i. Probar que si $a > \sqrt{2}$ entonces A es definida positiva. (10 puntos)

      ii. Para $a > \sqrt{2}$ escribir la factorización de Cholesky de A. (10 puntos)

4. Sea $Q = [q_1, q_2, \ldots, q_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz ortogonal con columnas q_i.

   (a) Hallar una reflexión de Householder $H_v = I - 2vv^t/(v^tv)$ tal que $H_v\, q_1 = e_1$. Verificar que se cumple la igualdad. (10 puntos)

   (b) Probar que la matriz H_vQ es de la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{Q} \end{pmatrix}$ con $\widetilde{Q} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ una matriz ortogonal. ¿De que forma es H_vQ si $v = q_n + e_1$? (15 puntos)

[1] Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *nilpotente* si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. V o F:

a- Si $A^2 + I = 0 \Rightarrow n$ es par.

(no sé !!) mirá los determinantes ¿

VERDADERO:

Dem: Si $A^2+I=0 \Rightarrow A^2=-I \Rightarrow \det(A^2)=\det(-I)$

$\Rightarrow \underbrace{\det(A)\cdot\det(A)}_{=\det(A)^2 \geq 0} = \underbrace{\det(-I)}_{=\prod_{i=1}^{n} -1 = (-1)^n}$

∴ Si n impar $\Rightarrow \det(-I) = -1$ Abs! pues $\det(A)^2 = -1$ ✗

∴ n es par!

b- $A^2 + A - I = 0 \Rightarrow A$ es invertible. VERDADERO.

. $A^2+A-I=0 \Leftrightarrow A^2+A=I \Leftrightarrow A(A+I)=I$

$\Leftrightarrow (A+I)A = I$

Vimos que $A+I$ es la inversa de A.

Por lo tanto A es inversible. ✓

c- $tr(A^t.A)=0 \Rightarrow A=0$. VERDADERO:

$(A^t.A)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a^t_{ik}.a_{ki} = ⊛$

Pero como $\underbrace{a_{ij}}_{\in A} = \underbrace{a^t_{ji}}_{\in A^t}$ pues se trata de la traspuesta de A

tenemos que ⊛ $= \sum_{k=1}^{n} a^2_{ki}$ ✓

Luego, sabemos por hipótesis que $tr(A^t.A)=0$.

$tr(A^tA) = \sum_{i=1}^{n}(A^t A)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a^2_{ki} = 0.$ ✓

Como estamos haciendo suma de números positivos, y ésa suma da cero, necesariamente ésos números tienen que ser cero.

∴ $a_{ij}=0 \quad \forall 1 \leq i,j \leq n$ ∴ $A=0$.

d- Si $Nu(A) \neq \{0\} \Rightarrow A$ es nilpotente. FALSO.

Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Nu(A) = \langle (1,1) \rangle$
$\therefore Nu(A) \neq \{0\}$

Pero A no es nilpotente:

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\nexists\ k \in \mathbb{N}$ tq $A^k = 0$ dado que $A^m = A$. $\forall\ m \in \mathbb{N}$.

e- $Nu(A) = Nu(A^t \cdot A)$ VERDADERO. Sup $A \neq 0$.

$\subseteq$) VALE, pues, sea $x \in Nu(A) \Rightarrow Ax = 0$.
Luego $A^t \cdot A \cdot x = A^t \cdot 0 = 0$ $\therefore x \in Nu(A^t \cdot A)$

$\supseteq$) Sea $x \in Nu(A^t A)$, $x \neq \vec{0}$ $\Rightarrow A^t A \underbrace{x}_{\neq 0} = 0$.

¿$\Rightarrow$? $\underbrace{A^t \cdot A = 0}$ o $\underbrace{Ax = 0}$

si pasa ésto $\Rightarrow x \in Nu(A)$:)

$tr(A^t A) = tr(\vec{0}) = 0$ X que haya un x en el
$\Rightarrow A = 0$ Abs! núcleo no quiere decir
Por ítem (c) que la traza sea 0

$\therefore Nu(A) = Nu(A^t \cdot A)$.

Ejercicio 2 =

a - Para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, construir $\hat{M}_k$ tq $A^{(k+1)} = \hat{M}_k \cdot A^{(k)}$

¿ $\hat{M}_k^{-1}$?

Sea $\boxed{\hat{M}_k = I - \hat{m}_k \cdot e^t_{(n-k)}}$

donde $e_{(n-k)}$ = el $(n-k)$-ésimo ~~vector~~ de la base canónica.

y $\hat{m}_k = \begin{pmatrix} m_{1k} \\ \vdots \\ m_{n-k\,k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ fila $n-k$ $\qquad m_{ik} = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}$

¡OJO! en el primer paso estos valores son de la matriz A, pero a partir del 2do paso son de la matriz $\hat{M}_1 \cdot A$ y así va cambiando (NO SÉ como explicarlo mejor)

Veamos que $A^{(k+1)} = \hat{M}_k \cdot A^{(k)}$

$$A^{(k+1)} = \begin{pmatrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ fila } n-(k+1)$$

columna $n-(k+1)$

$$\hat{M}_k A^{(k)} = \left(I - \hat{m}_k \cdot e^t_{(n-k)}\right) \begin{pmatrix} & 0 \\ & \ddots \end{pmatrix} \text{ fila } n-k$$

columna $n-k$.

$$\hat{m}_k \cdot e^t_{(n-k)} = \begin{pmatrix} m_{1k} \\ \vdots \\ m_{n-k\,k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow n-k$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & m_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & m_{n-k\,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$I - \hat{m}_k \cdot e^t_{(n-k)} = \begin{pmatrix} 1 & & -m_{1k} & & 0 \\ & 1 & \vdots & & \\ & & -m_{n-k\,k} & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \to \text{fila } n-k$$

columna $n-k$

$$\Rightarrow \hat{M}_k \cdot A^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & -m_{1k} & & 0 \\ & 1 & -m_{n-k\,k} & & \\ & & 1 & & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 0 & \\ & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} n-k$$

$n-k$

$$= \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\left(\hat{M}_k \cdot A^{(k)}\right)_{1k} = \sum_{j=1}^{n} \hat{M}_{k\,1j} \cdot A^{(k)}_{jk} = 1 \cdot a^{(k)}_{1k} - m_{1k} \cdot a^{(k)}_{kk}$$
$$= a^{(k)}_{1k} - \frac{a^{(k)}_{1k}}{a^{(k)}_{kk}} = 0.$$

∴ Esta multiplicación me anula los elementos de la columna $(n-K)$ que están por arriba de la diagonal.

∴ $A^{(k+1)} = \hat{M}_k \cdot A^{(k)}$

• $\boxed{\hat{M}_k^{-1} = I + \hat{m}_k \cdot e^t_{(n-k)}}$

$$\hat{M}_k \cdot \hat{M}_k^{-1} = \left(I - \hat{m}_k \cdot e^t_{(n-k)}\right)\left(I + \hat{m}_k \cdot e^t_{(n-k)}\right)$$

$$= I + \cancel{\hat{m}_k \cdot e^t_{(n-k)}} - \cancel{\hat{m}_k e^t_{(n-k)}} - \hat{m}_k e^t_{(n-k)} \cdot \hat{m}_k e^t_{(n-k)}$$

$$= I - \underbrace{\hat{m}_k \cdot e^t_{(n-k)} \cdot \hat{m}_k e^t_{(n-k)}}_{=0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & m_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & m_{n-k\,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & m_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & m_{n-k\,k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

NOTA

b- Hallar la factorización $A = \underbrace{U}_{\text{t. sup con 1's en la diag.}} \cdot \underbrace{L}_{\text{t. inf}}$ de

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{M}_2 \, \hat{M}_1 \cdot A = L$$

donde $\hat{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\hat{M}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Luego, $A = \underbrace{M_1^{-1} \cdot M_2^{-1}}_{=U} \cdot L$.

$$U = M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore A = U \cdot L$.

C- "Una matriz inversible tiene fact. U.L $\Leftrightarrow$ sus submatrices principales son inversibles".

FALSO!

Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = (-1)^{(3+1)} \cdot (\ -3) + (-1)^{3+2}(-2) + (-1)^{(3+3)}(\ 0)$$

$$= -3 + 2 \ = -1$$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ es inversible.

$A = U.L$ con $U = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\hat{M}_1 . A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{M}_2 . \hat{M}_1 . A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = L$$

$$U = \hat{M}_1^{-1} . \hat{M}_2^{-1}$$

$\therefore$ A tiene factorización U.L.

Pero las submatrices principales de A no son inversibles:

la submatriz $A_1 = 0$ no es inversible

y $A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ tampoco es inversible

pues $\det(A_{22}) = 0.3 - 2.0 = 0$.

$\therefore$ La propiedad no vale.

[Lo que supongo que sí vale es que las submatrices principales "de abajo hacia arriba" son inversibles; En este ej: $\tilde{A}_1 = 1$, $\tilde{A}_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$]

HOJA N°

FECHA

Ejercicio 3 =

a- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es d.p $\Leftrightarrow P^t A P$ d.p con P una matriz de permutación.

Dem = $\Rightarrow$) Sea $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, qvq $x^t P^t A P x > 0$

de ésta manera veo que $P^t A P$ es definida positiva.

Considero $y = Px$, donde $y \neq 0$ pues P al ser matriz de permutación es inversible, entonces $Pz = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

y además $x \neq 0$.

$$x^t P^t A P x = (P.x)^t A (Px) = y^t A y > 0$$

pues A es d.p.

$\Leftarrow$) qvq $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ $x^t A x > 0$.

Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tq $x^t A x \leq 0$.

Por ser P matriz de permutación, P es ortogonal, i.e. $P.P^t = I = P^t.P$.

Luego, $x^t A x = x^t \underbrace{PP^t}_{I} A \underbrace{PP^t}_{I} x$

$$= (P^t x)^t . P^t A P . (P^t x)$$

Sea $y = P^t x$, $y \neq 0$ por el mismo razonamiento que antes.

Entonces $y^t . P^t A P y \leq 0$ Abs! pues $P^t A P$ es def. pos.

$\therefore$ A es def. positiva. #

NOTA

b- Sea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

i. Si $a > \sqrt{2}$ entonces A es def. positiva.

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}}_{L^T}$$

• Si veo que puedo factorizar a A como producto de L y L^T entonces A tiene fact. de cholesky, luego A es def. positiva.

- $a = l_{11}^2 \Rightarrow \boxed{\sqrt{a} = l_{11}}$ → $a > \sqrt{2} > 0$, se puede hacer $\sqrt{a}$.

- $1 = l_{11} \cdot l_{21} \Rightarrow 1 = \sqrt{a} \cdot l_{21} \therefore \boxed{\frac{1}{\sqrt{a}} = l_{21}}$

- $0 = l_{11} \cdot l_{31}$, $l_{11} \neq 0 \Rightarrow \boxed{l_{31} = 0}$.

- $a = l_{21}^2 + l_{22}^2 \Rightarrow \boxed{\sqrt{a - \frac{1}{a}} = l_{22}}$

¿Y si $a<0$?

Veamos que $a - \frac{1}{a} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{a} \Leftrightarrow a^2 \geq 1$

$\Leftrightarrow a \geq 1$ ✓

pues $a > \sqrt{2} = 1,41\ldots$

- $1 = l_{21} \cdot \overset{=0}{l_{31}} + l_{22} \cdot l_{32}$.

$\Rightarrow 1 = \sqrt{a - \frac{1}{a}} \cdot l_{32} \therefore \boxed{\frac{1}{\sqrt{a-\frac{1}{a}}} = l_{32}}$

HABRÍA QUE VER QUE $\sqrt{a-\frac{1}{a}} \neq 0$.

- $a = \underbrace{l_{31}^2}_{=0} + l_{32}^2 + l_{33}^2$

$\Rightarrow a = \frac{1}{a - \frac{1}{a}} + l_{33}^2 \Rightarrow \boxed{\sqrt{a - \frac{1}{a-\frac{1}{a}}} = l_{33}}$

Veamos que $a - \frac{1}{a - \frac{1}{a}} > 0 \Leftrightarrow a > \frac{1}{a - \frac{1}{a}} \Leftrightarrow a^2 - 1 > 1$ OJO LOS SIGNOS.

$\Leftrightarrow |a| > \sqrt{2}$

y ésto vale por Hip. ✓

HOJA N°

FECHA

$\therefore$ A tiene factorización de Cholesky con $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$L = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{a}} & \sqrt{a - \frac{1}{a}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a-\frac{1}{a}}} & \sqrt{a - \frac{1}{a-\frac{1}{a}}} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ A es def. positiva.

- El ítem ii se encuentra resuelto junto con el ítem anterior.

NOTA

HOJA Nº

FECHA

Ejercicio 4 = Sea $Q = [q_1, q_2, \dots, q_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal, q_i = columna i de Q.

a- Hallar una reflexión de Householder. $H_v = I - 2\frac{vv^t}{v^tv}$

tq $H_v\, q_1 = e_1$.

$$Q = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

quiero H_v tq $H_v \cdot q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Considero $v = \tilde{q} - e_1$, $\tilde{q} = \frac{q_1}{\|q_1\|_2}$

$\|q_1\|_2 = ?$

Veamos que $\underbrace{\|\tilde{q}\|}_{} = 1 = \|e_1\|$

$= \left\| \frac{q_1}{\|q_1\|_2} \right\| = \frac{1}{\|q_1\|_2} \|q_1\| = 1$.

$\in \mathbb{R}$. sale para afuera por prop de norma

qvq: $\left(I - 2\frac{vv^t}{v^tv}\right) q_1 = e_1$

$$\left(I - 2\frac{(\tilde{q}-e_1)(\tilde{q}-e_1)^t}{(\tilde{q}-e_1)^t(\tilde{q}-e_1)}\right) q_1 = q - \frac{2(\tilde{q}-e_1)(\tilde{q}-e_1)^t \cdot q_1}{\tilde{q}^t\cdot\tilde{q} - \tilde{q}^t\cdot e_1 - e_1^t\tilde{q} + e_1^t e_1}$$

como $\|\tilde{q}\|^2 = \|e_1\|^2 = \langle \tilde{q}, \tilde{q}\rangle = \tilde{q}^t\cdot\tilde{q} = e_1^t\cdot e_1$

también sabemos que: $\tilde{q}^t\cdot e_1 = e_1^t\cdot\tilde{q}$ pues el producto interno es simétrico.

NOTA

$$= q_1 - \frac{\cancel{2}\,(\tilde{q}-e_1)(\tilde{q}-e_1)^t\, q_1}{\cancel{2}\,\tilde{q}^t\,\tilde{q} - \cancel{2}\,\tilde{q}^t e_1}$$

$$= q_1 - \frac{(\tilde{q}-e_1)(\tilde{q}-e_1)^t}{\underbrace{\tilde{q}^t(\tilde{q}-e_1)}_{\in \mathbb{R}}} \cdot q_1$$

$$\Rightarrow \tilde{q}^t(\tilde{q}-e_1) = \left(\tilde{q}^t(\tilde{q}-e_1)\right)^t = (\tilde{q}-e_1)^t \cdot \tilde{q}$$

$$= q_1 - \frac{(\tilde{q}-e_1)\cdot(\tilde{q}-e_1)^t \cdot \frac{\tilde{q}}{\|q_1\|}}{\tilde{q}^t(\tilde{q}-e_1)}$$

$$= q_1 - \frac{\tilde{q}}{\|q_1\|} + \frac{e_1}{\|q_1\|} ? = q_1 - q_1 + \frac{e_1}{\|q_1\|} = \frac{e_1}{\|q_1\|}.$$

- Como Q es ortogonal entonces las columnas de Q forman un conjunto ortonormal, es decir todos los vectores entre sí son ortogonales y todos los vectores tienen norma 1.

Luego, como q_1 es una columna de Q, $\|q_1\| = 1$

$$\therefore Hv \cdot q_1 = \frac{e_1}{\|q_1\|} = e_1 \qquad \#$$

B

---

b- Probar que $H_v \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{Q} \end{pmatrix}$, $\tilde{Q} \in \mathbb{R}^{(n-1)(n-1)}$ ortogonal.

¿De qué forma es $H_v Q$ si $v = q_n + e_1$?

$$H_v \cdot Q = H_v \begin{pmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ H_v q_1 & H_v q_2 & \cdots & H_v q_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ e_1 & H_v q_2 & \cdots & H_v q_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

qvq $H_v \cdot Q = \left(e_1 \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \cdots 0 \\ \tilde{Q} \end{matrix} \right)$

H_v y Q son ortogonales $\Rightarrow H_v \cdot Q$ también lo es